## №12-дәріс

## Жазықтықтағы түзу және олардың түрлері. Екі түзу арасындағы бұрышты есептеу. Жазықтықта түзулердің орналасуы.

### Сызықтар, беттер және олардың теңдеулері

Объект деген сөзді жазықтықтағы сызықтар, кеңістіктегі сызықтар мен беттер деп түсінеміз.

**Анықтама**

1. Объект деп әрқайсысы осы объектінің мінездемелік қасиеттерін қанағаттандыратын нүктелердің геометриялық орны ( н.г.о).

2. Математикалық қатынастар арқылы немесе объектінің нүктелерінің координаталары арасындағы қатынастар арқылы жазылған объектінің мінездемелік қасиеттерін объектінің теңдеуі немесе объектінің теңдеулер жүйесі деп атаймыз.

*Мысал 1.* Центрі координатаның бас нүктесінде орналасқан радиусы $r$ жазықтықтағы шеңбер - объект. Мінездемелік қасиеті: шеңбердің барлық нүктелері осы шеңбердің центрінен бірдей $r$ қашықтықта орналасқан. Егер $O(0,0)$ - координаталардың бас нүктесі, ал $M(x, y)$ - шеңбердің ағымдық (кез келген) нүктесі болса, онда $\overline{OM} = r$ немесе $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ - шеңбердің мінездемелік қасиетінің математикалық түрде жазылуы. Ықшамдай келе, объектінің теңдеуін аламыз $x^2 + y^2 = r^2$.

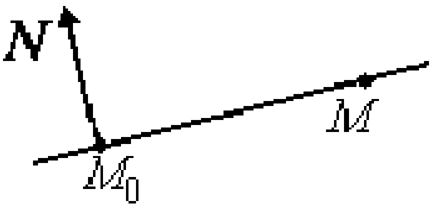
Объектпен таныса келе мынадай сұрақтар туындайды:

1. Берілген мінездемелік қасиеті бойынша объектінің теңдеуін құру.

2. Берілген объекттің теңдеуі бойынша, теңдеудің әртүрлі параметрлік мәндерінде объектіні зерттеу.

*Мысал 2.*

а) Жазықтықта берілген $M_o(x_o, y_o)$ нүктесі арқылы өтетін, $\overline{N}(A, B)$ векторына перпендикуляр түзудің теңдеуін жаз.

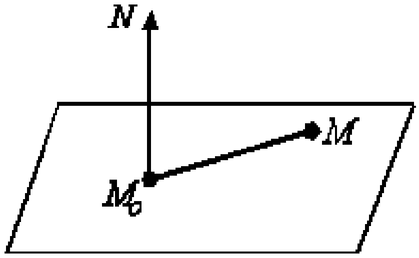



$M(x, y)$ - ізделінді түзудің ағымдық нүктесі болсын. Онда $\overline{M_oM} = (x - x_o, \quad y - y_o) \perp \overline{N}(A, B)$. Бұдан, $\overline{M_oM} \cdot \overline{N} = 0$. Немесе

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) = 0 \qquad (1)$$

(1) – берілген нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуі.

б) $M_o(x_o, y_o, z_o)$ нүктесі арқылы өтетін $\overline{N}(A, B, C)$ векторына перпендикуляр жазықтықтың теңдеуін жаз.




$\overline{M_oM} \perp \overline{N}$ болғандықтан:

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0 \qquad (2)$$

(2) $- M_o$ нүктесі арқылы өтетін түзудің теңдеуі.

2 – мысалдан, жазықтықтағы сызықтың теңдеуі - $F(x, y) = 0$ түрінде, ал беттің теңдеуі - $F(x, y, z) = 0$ түрде болатынын байқаймыз. Кеңістіктегі сызықтың жалпы теңдеуі екі беттің қиылысуы ретінде беріледі, яғни

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

Е с к е р т у . (1) мен (2)-ден байқайтынымыз, түзу мен жазықтықтың теңдеуі сызықтық, яғни координатаға қарағанда бірінші дәрежелі.

## Жазықтықтағы түзу

Жазықтықтағы түзудің жалпы теңдеуі

$$l \sim \quad Ax + By + C = 0, \qquad (4)$$

$\overline{N}(A, B) \perp l$ - $l$ түзуінің нормаль векторы.

1. Егер $B \neq 0$, онда (4)-тен $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ шығады, яғни $y = kx + b$ бұрыштық коэффиценті бойынша берілген теңдеу, мұндағы $k = -\frac{A}{B}$ - бұрыштық коэффицент, ол түзудің $OX$ осімен жасайтын бұрышының тангенсіне тең .
2. Егер $C = 0$ - онда түзу координатаның бас нүктесі арқылы өтеді.
3. Егер $A = 0$ - онда $l \,||\, OX$ .
4. Егер $B = 0$ - онда $l \,||\, OY$ .
5. $x = 0, \quad y = 0$ - координата осьтерінің теңдеулері.

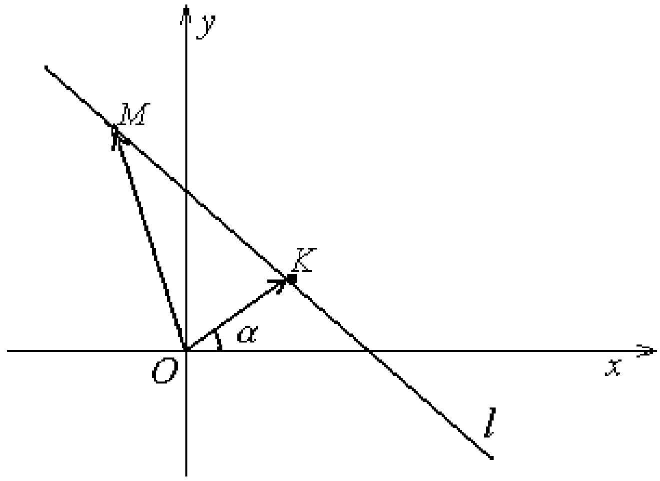
## Екі нүкте $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ арқылы өтетін түзудің теңдеуі.

$M(x, y)$ - түзудің ағымдық нүктесі болсын. Онда $\overline{M_1M} \,||\, \overline{M_1M_2}$.
Векторлардың коллинеар болу шартын ескерсек:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad (5)$$

**Түзудің «кесіндідегі» теңдеуі.** Түзудің координат осьтерімен қиылысу нүктелерінің координаталары $M_1(a;0)$ және $M_2(0;b)$ болсын. (5)теңдігіне қойсақ: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

**Түзудің нормаль теңдеуі.**




$\overline{OK}\perp l$, $\left|\overline{OK}\right|=p$, $\alpha$ - $\overline{OK}$ мен $OX$ арасындағы бұрыш болсын. Онда $\overline{n^o}(\cos\alpha;\sin\alpha)\|\,\overline{OK}$ и $\left|\overline{n^o}\right|=1$. $np_{\overline{n^o}}\overline{OM}=\overline{OM}\cdot\overline{n^o}=p$ болғандықтан:

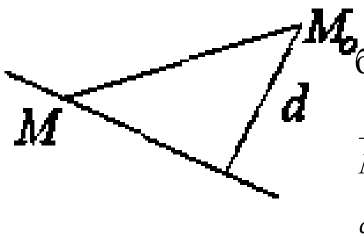
$$\overline{OM}\cdot\overline{n^o}-p=0, \quad \text{или } x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0 \qquad (6)$$

Е с к е р т у. (4) –ші теңдеуді нормаль түрге келтіру үшін, оны

$$\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

санына көбейту керек, мұндағы $\mu$ –дың таңбасы (4) теңдеудегі $C$ -ның таңбасына қарама-қарсы таңбамен алынады.

$M_o(x_o,y_o)$ **нүктесінен** $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ **түзуіне дейінгі ара қашықтық**




$M_1(x_1,y_1)$ нүктесі түзуге тиісті нүкте болсын. Онда

$$x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha=p.$$

$\overline{M_1M_o}=(x_o-x,\ y_o-y_1)$ және

$d=\left|np_{\overline{n^o}}\overline{M_1M_o}\right|=\left|\overline{M_1M_o}\cdot\overline{n^o}\right|$ болғандықтан:

$$d=\left|(x_o-x_1)\cos\alpha+(y_o-y_1)\sin\alpha\right|=\left|x_o\cos\alpha+y_o\sin\alpha-(x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha)\right|.$$

Немесе

$$d=\left|x_o\cos\alpha+y_o\sin\alpha-p\right| \qquad (7)$$

Егер түзу (4)-ші теңдеу түрінде берілген болса, онда

$$d = \frac{|Ax_o + By_o + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (8)$$

**Түзулер арасындағы бұрыш. Түзулердің параллельдік және перпендикулярлық белгілері**

$$\begin{array}{l} l_1 \sim \quad A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \ , \\ l_2 \sim \quad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{array}$$ түзулері берілсін.

$\overline{N}_1(A_1, B_1) \perp l_1$, $\overline{N}_2(A_2, B_2) \perp l_2$ болғандықтан:

а) түзулер арасындағы бұрыш

$$\cos\alpha = \frac{\overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2}{|\overline{N}_1| \cdot |\overline{N}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

б) $l_1 || l_2$, егер $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$

в) $l_1 \perp l_2$, егер $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$

**Жазықтықтағы аналитикалық геометрияның кейбір есептерін шығаруда анықтауыштардың қолдануы**

1. $M(x, y)$ - түзудің ағымдық нүктесі болсын. Екі нүкте $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ арқылы өтетін түзудің теңдеуі-

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

2. Үш нүкте $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ және $M_3(x_3, y_3)$ нүктелері төбелері болатын үшбұрыштың ауданы:

$$S = \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{matrix} \right\|$$

3.

$$\begin{array}{l} l_1 \sim \quad A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \ , \\ l_2 \sim \quad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \\ l_3 \sim A_3 x + B_3 y + C_3 = 0 \end{array}$$ түзулерінің бір еүктеде қиылысуының шарты:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$